13° FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
FEPEG
A UNIVERSIDADE NA CONTEMPORANEIDADE
DIÁLOGOS E CONSTRUÇÕES
Realização: Unimontes, Minas Gerais, PIBID Unimontes, Residência Pedagógica Unimontes
Apoio: FAPEMIG, FADENOR
ISSN: 1806-549X

AUTOR(ES): NARCISO DA HORA LISBOA

A GEOMETRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Introdução

O presente trabalho é a respeito da geometria dos números complexos, mais concretamente, vamos apresentar no conjunto dos números complexos alguns resultados contemplados na Geometria Analítica e na Álgebra Linear. Este tipo de estudo no conjunto dos números complexos tem sentido, pois todo número complexo tem uma representação vetorial. É objetivo deste trabalho definir produto interno no conjunto dos números complexos, apresentar e interpretar, geometricamente, alguns resultados tais como ângulo entre dois números complexos, o Teorema de Pitágoras e a Lei dos Cossenos. Pretendemos aqui tornar o estudo dos números complexos mais agradável, já que esses números têm amplas aplicações na Matemática, na Física e nas Engenharias. Para concretizar este trabalho fizemos, inicialmente, uma pesquisa bibliográfica completa sobre o conjunto dos números complexos para investigação minuciosa do tema proposto.

Material e Métodos

A metodologia empregada neste trabalho consistiu na revisão bibliográfica da literatura existente a respeito de números complexos em livros didáticos e materiais disponíveis na internet. Inspirados por **ÁVILA (2008)**, em que o autor se preocupa com a interpretação geométrica dos resultados, e na experiência com o estudo dos números complexos ao longo dos anos é que surgiu a ideia produzir este material.

Resultados e Discussão

Primeiramente, apresentaremos a construção do conjunto dos números complexos. Em seguida, daremos alguns conceitos e resultados sobre os números complexos.

A. Conjunto dos Números Complexos

Considere R, o conjunto dos números reais, e $R^2 = R \times R = \{(x,\ y) |\ x,\ y \in R\}$. Em R^2, definimos as seguintes operações de adição e multiplicação. Para quaisquer $(a,\ b)$ e $(c,\ d)$ em R^2,

(*i*) $(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d)$;

(*ii*) $(a,\ b).(c,\ d) = (ac - bd,\ ad + bc)$.

Ainda por definição, dois elementos $(a,\ b)$ e $(c,\ d)$ em R^2 são iguais, e escrevemos $(a,\ b) = (c,\ d)$, quando $a = c$ e $b = d$. O conjunto R^2, munido das operações definidas em (*i*) e (*ii*), é denominado *conjunto dos números complexos* e será denotado por C **(FERREIRA, 2013)**. Identificando cada número real x com o número complexo $(x,\ 0)$, adotando o símbolo i para o número complexo $(0,\ 1)$ e observando que, para todo $(a,\ b) \in C$, $(a,\ b) = (a,\ 0) + (b,\ 0)(0,\ 1)$, podemos escrever um número complexo $z = (a,\ b)$ como sendo $z = a + bi$. Além disso, como $(0,\ 1)^2 = (0,\ 1).(0,\ 1) = (-1,\ 0)$, vemos que $i^2 = -1$. O número complexo i é chamado de *unidade imaginária*.

Dado um número complexo $z = x + yi$, x é chamado de *parte real* e y de *parte imaginária* de z, e são denotados, respectivamente, por $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$. Um número complexo $z = x + yi$ pode ser identificado com o vetor $0z$ de componentes x e y.

Dado um número complexo $z = x + yi$, o *módulo* de z, denotado por $|z|$, é definido como sendo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **(ÁVILA, 2008)**. O *complexo conjugado* do número $z = x + yi$, denotado por $\bar{z}$, é definido como sendo o número complexo $\bar{z} = x - yi$. Como consequência desses conceitos, deduzimos que $|z|^2 = z.\bar{z}$, para todo $z \in C$.

Considerando a representação geométrica de um número complexo não nulo z, obtemos a *representação polar* de z que é dada por $z = |z|(cos\theta + i\, sen\theta)$, em que $\theta \in R$ é o ângulo que z faz com o eixo $0x$ no sentido oposto ao dos

ISSN: 1806-549X

ponteiros do relógio **(Churchill, 1975)**.

O *plano complexo* e o *plano euclidiano* diferem um do outro devido ao fato de termos definido a multiplicação de números complexos, enquanto que no plano euclidiano não temos tal operação.

NOTA: Com base nos conceitos apresentados até o presente momento, enunciamos abaixo algumas das propriedades referentes aos números complexos:

(*a*) Para quaisquer $z,\ w \in C$, $\bar{\bar{z}} = z$ e $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$;

(*b*) Se $a \in R$ e $z \in C$, então $Re(az) = a\,Re(z)$ e $Im(az) = a\,Im(z)$;

(*c*) Se $z = |z|(cos\alpha + i\,sen\alpha)$ e $w = |w|(cos\beta + i\,sen\beta)$, então $z.w = |z||w|[\cos cos\,(\alpha + \beta) + i\,sen(\alpha + \beta)]$;

(*d*) Para quaisquer $z,\ w \in C$, $|z + w|^2 = |z|^2 + Re(z.\bar{w}) + |w|^2$ e $|z - w|^2 = |z|^2 - Re(z.\bar{w}) + |w|^2$.

Observe que a *Lei do Paralelogramo* pode ser obtida do item (*d*) acima. Basta somar as duas identidades.

B. Produto Interno no Conjunto dos Números Complexos

A função $\langle , \rangle : C \times C \rightarrow R$, definida por $\langle z,\ w\rangle = Re(z\bar{w})$, é um produto interno em C, ou seja,

(P_1) $\langle z,\ z\rangle \geq 0$, para todo $z \in C$, e $\langle z,\ z\rangle = 0$ se, e somente se, $z = 0$;

(P_2) $\langle z,\ w\rangle = \langle w,\ z\rangle$, para quaisquer $z,\ w \in C$;

(P_3) $\langle az,\ w\rangle = a\langle z,\ w\rangle$, para todo $a \in R$ e para quaisquer $z,\ w \in C$;

(P_4) $\langle z_1 + z_2,\ w\rangle = \langle z_1,\ w\rangle + \langle z_2,\ w\rangle$, para quaisquer $z_1,\ z_2,\ w \in C$.

C. Ângulo entre Dois Números Complexos

Considere $z = |z|(\cos cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$ e $w = |w|(\cos cos\,\beta + i\,sen\,\beta)$ dois números complexos não nulos. Então,

$$\langle z,\ w\rangle = |z||w|cos(\alpha - \beta),$$

ou seja,

$$\cos cos\,(\alpha - \beta) = \frac{\langle z, w\rangle}{|z||w|} = \frac{Re(z\bar{w})}{|z||w|},$$

em que $\alpha - \beta$ é o ângulo entre z e w, com $\alpha - \beta$ entre 0 e π (Fig. 1).

Como uma consequência do resultado acima temos a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*, dada por $|\langle z,\ w\rangle| \leq |z||w|$, para quaisquer $z,\ w \in C$.

D. Teorema de Pitágoras

Considere z e w dois números complexos não nulos. Se $\langle z,\ w\rangle = 0$, ou seja, se z e w são ortogonais, então

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \text{ (Fig. 2).}$$

E. Lei dos Cossenos

Considere $z_1 = |z_1|(\cos cos\,\theta_1 + i\,sen\,\theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos cos\,\theta_2 + i\,sen\,\theta_2)$ e $z_3 = |z_3|(\cos cos\,\theta_3 + i\,sen\,\theta_3)$ números complexos não nulos. Se $z_3 = z_2 - z_1$, então

$$|z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|\,|z_2|cos(\theta_2 - \theta_1),$$

em que $\theta_2 - \theta_1$ é o ângulo entre z_1 e z_2 (Fig. 3).

Realização: Unimontes, Minas Gerais, PIBID Unimontes, Residência Pedagógica Unimontes
Apoio: FAPEMIG, FADENOR
ISSN: 1806-549X

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos a construção do conjunto dos números complexos e algumas formas diferentes de escrever um número complexo. Visto que um número complexo tem uma representação vetorial, mostramos alguns resultados da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, tendo o cuidado minucioso para construir conceitos intrínsecos ao conjunto dos números complexos, como é o caso do produto interno entre dois números complexos. Esperamos que essa abordagem geométrica seja bem recebida pelos estudantes e que ela facilite a compreensão desse conteúdo de grande aplicabilidade na Matemática, na Física e nas Engenharias.

Agradecimentos

Externo aqui meus sinceros agradecimentos aos organizadores do XIII Fórum de Ensino, Pesquisa, Extensão e Gestão da Unimontes pela oportunidade de apresentar este trabalho.

Referências

ÁVILA, G. Variáveis Complexas e Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
CHURCHILL, R. V. Variáveis Complexas e suas Aplicações. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1975.
FERREIRA, J. A Construção dos Números. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção de Textos Universitários).

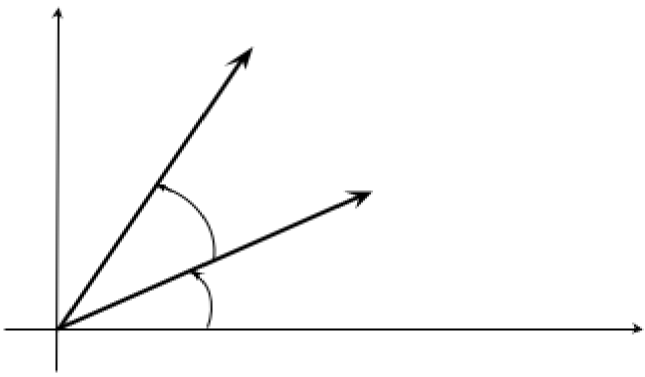

Figura 1. Ângulo entre os números complexos e

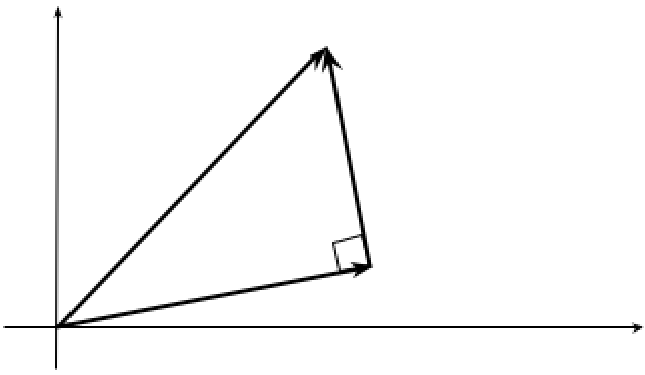

Figura 2. Teorema de Pitágoras