ISSN: 1806-549X

AUTOR(ES): HUGO EDMAR DIAS SANTOS e ROSIVALDO ANTONIO GONÇALVES.
ORIENTADOR(A): DÉBORA SANTOS RODRIGUES

A ELIPSE DE CURVATURA NO ESTUDO DE 2-VARIEDADES IMERSAS EM R^n, $n \geq 4$

Introdução

Neste presente trabalho, descrevemos o conceito de *elipse de curvatura,* que é definida como o lugar geométrico que contém os extremos dos vetores curvatura normal das seções normais de uma 2-variedade (ou superfície) com o hiperplano gerado pela soma direta de seu espaço normal com alguma direção tangente.

O conceito de elipse de curvatura foi introduzido por Kommerell em [3] e depois estudado por Little em [2] onde faz uma análise detalhada da elipse de curvatura, caracterizando propriedades geométricas de superfícies em termos dessa elipse e mostrando que a generalização desta para variedades é uma variedade de *Veronese* ou uma projeção de *Veronese*. Nosso objetivo é definir a elipse de curvatura e mostrar alguns resultados dessa definição no estudo de 2-variedades imersas no R^n, $n \geq 4$, tendo como base a dissertação de Rodrigues [5].

Material e métodos

A metodologia utilizada foi a metodologia da própria pesquisa matemática, baseada na revisão de trabalhos de outros autores e no desenvolvimento de pesquisa dos assuntos estudados. O texto principal no qual este presente trabalho se baseia é a dissertação de Rodrigues [5]. Outros textos foram usados como referência como a tese de Binotto [1] e a tese de Moraes [4]. As imagens apresentadas foram construídas com o software geogebra, disponível em https://www.geogebra.org.

Resultados e discussão

A. Definição e exemplos

Como a parametrização X de S é uma aplicação diferenciável e $(dX)_q : R^2 \longrightarrow R^n$ é injetora, para todo ponto $p = X(q)$, existe o T_pS, chamado plano tangente a S em p, gerado pelas combinações lineares de $X_u(q)$ e $X_v(q)$, i.e., para todo $w \in T_pS$, $w = aX_u(q) + bX_v(q)$. Seja o círculo unitário centrado em p, parametrizado por $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\nu_\theta \in T_pS$ o vetor unitário na direção θ. Definimos como seção normal da superfície S em p na direção θ, a interseção $\gamma_\theta = H_\theta \cap S$, onde H é o hiperplano definido por $H_\theta = N_pS \oplus \nu_\theta$. Escolhendo uma parametrização para essa curva, de maneira que γ_θ esteja parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $p = \gamma_\theta\left(s_0\right)$, $\gamma_\theta'(s_0) = \nu_\theta$, além disso o vetor normal a essa curva é também normal à superfície, logo $\gamma_\theta''\left(s_0\right) \in N_pS$. Esse vetor é chamado de vetor curvatura normal da superfície S no ponto p.

Definimos, então, a aplicação η_p: $S_p^1 \to N_pS$, $\nu_\theta \longmapsto \eta_p(\theta) = \pi^N(\gamma_\theta'')$, onde S_p^1 é o círculo unitário no plano tangente, centrado em p e $\pi^N(\gamma_\theta'')$ é a projeção ortogonal do vetor curvatura normal da curva obtida pela interseção de $H_\theta = N_pS \oplus \nu_\theta$ e a superfície S. A essa aplicação se dá o nome *Elipse de Curvatura*.

A fim de ilustrar as relações e definições, consideremos uma superfície S no espaço tridimensional, seu plano tangente T_pS no ponto p, e N_pS, a reta normal a S no ponto p, S_p^1 como mostrados em Fig. 1A e Fig. 1B. Entretanto, não seguiremos no R^3, pois o N_pS de uma superfície imersa no R^3 é apenas uma reta e, como veremos posteriormente, a elipse de curvatura se deforma em um ponto ou um segmento de reta.

13° FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO FEPEG
A UNIVERSIDADE NA CONTEMPORANEIDADE DIÁLOGOS E CONSTRUÇÕES
Realização: Unimontes, Minas Gerais, PIBID Unimontes, Residência Pedagógica Unimontes
Apoio: FAPEMIG, FADENOR
ISSN: 1806-549X

O nome "Elipse de Curvatura" não é impróprio. De fato, seja a superfície S, uma curva γ_θ de S que passa pelo ponto p com direção tangente ν_θ parametrizada pelo comprimento de arco, a decomposição $R^n \equiv T_pS \oplus N_pS$ e a projeção ortogonal $\pi^N: R^n \longrightarrow N_pS$, $u \longmapsto \pi^N(u) = u - \left(u \cdot w_1(p)\right)w_1(p) - \left(u \cdot w_2(p)\right)w_2(p)$, com $\{w_1(p), w_2(p)\}$ uma base ortonormal de T_pS. Suponhamos que a superfície S esteja parametrizada por $\alpha: U \subset R^2 \rightarrow S \subset R^n$, $(u, v) \longmapsto \alpha(u, v)$ e que a curva ν_θ esteja parametrizada por $\gamma_\theta: I \rightarrow S \subset R^n$, $t \longmapsto \gamma_\theta(t) = \alpha(u(t), v(t))$. Assim temos $\gamma'_\theta(t) = u'(t)\alpha_u(u(t), v(t)) + v'(t)\alpha_v(u(t), v(t))$ e

$\gamma''_\theta(t) = u'(t)^2\alpha_{uu}(u(t), v(t)) + u''(t)\alpha_u(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)\alpha_{uv}(u(t), v(t)) + v'(t)^2\alpha_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t)\alpha_v(u(t), v(t))$. Portanto, a projeção do vetor curvatura $\gamma''_\theta(t)$ no espaço normal N_pSé dada por $\pi^N\left(\gamma''_\theta(t)\right) = u'(t)^2\alpha^N_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)\alpha^N_{uv}(u(t), v(t)) + v'(t)^2\alpha^N_{vv}(u(t), v(t))$. Se $\{\alpha_u(p),\ \alpha_v(p)\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente T_pS, então como γ_θ está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que $u'(t)^2 + v'(t)^2 = 1$, então podemos tomar θ tal que $u'(t) = cos(\theta)$ e $v'(t) = sen(\theta)$ e teremos $\pi^N\left(\gamma''_\theta(t)\right) = \theta\, \alpha^N_{uu}(p) + 2cos\theta sen\theta\alpha^N_{uv}(p) + sen^2\theta\alpha^N_{vv}(p)$. Usando relações trigonométricas básicas e fazendo as substituições devidas, podemos escrever a expressão anterior da seguinte maneira: $\eta_p(\theta) = \pi^N\left(\gamma''_\theta(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha^N_{uu}(p) + \alpha^N_{vv}(p)\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha^N_{uu}(p) - \alpha^N_{vv}(p)\right) \cos cos\,(2\theta) + \alpha^N_{uv}(p)sen(2\theta) = H + Bcos(2\theta) + Csen(2\theta)$, com $H = \frac{1}{2}\left(\alpha^N_{uu}(p) + \alpha^N_{vv}(p)\right)$, $B = \frac{1}{2}\left(\alpha^N_{uu}(p) - \alpha^N_{vv}(p)\right)$ e $C = \alpha^N_{uv}(p)$.

Seja S uma superfície imersa em R^n, $n \geq 4$, dado $p \in S$ dizemos que uma imersão $\varphi: S \longrightarrow R^n$ está localmente na *Forma de Monge* se φ está em $p \equiv (0, 0)$ da seguinte forma: $\varphi: (U \subset R^2,\ (0, 0) \longrightarrow (R^n,\ (0, 0, ..., 0)),\ (u, v) \longmapsto \varphi(u, v)$, com $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v),\ \varphi_2(u, v),\ ...,\ \varphi_{n-2}(u, v))$ com φ_i diferenciáveis, $\varphi(0, 0) = (0, 0, ..., 0)$ e $\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial v}(0, 0) = 0$ para todo $i \in \{1,\ 2, ..., n - 2\}$. Nesta parametrização temos $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(0, 0) = (1, 0, 0, ..., 0)$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(0, 0) = (0, 1, 0, ..., 0)$ que formam uma base ortonormal de T_pS. Consequentemente, os coeficientes da primeira forma normal em p são: $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Além disso, temos $\varphi^N_{uu}(p) = \varphi_{uu}(p)$, $\varphi^N_{uv}(p) = \varphi_{uv}(p)$, $\varphi^N_{vv}(p) = \varphi_{vv}(p)$. Portanto, a elipse de curvatura pode ser dada por $\eta_p(\theta) = H + Bcos(2\theta) + Csen(2\theta)$, com $H = \frac{1}{2}(\varphi_{uu}(p) + \varphi_{vv}(p))$, $B = \frac{1}{2}(\varphi_{uu}(p) - \varphi_{vv}(p))$, $C = \varphi_{uv}(p)$. A partir dessas equações, podemos observar que ao percorrer o círculo unitário em T_pS uma vez, a aplicação α percorre a elipse de curvatura duas vezes. Observamos também que os vetores B e C geram a elipse de curvatura e o vetor H, com origem no ponto p, tem extremo no centro da elipse e é chamado *vetor curvatura média* (**Figura 1C**).

Tomemos como exemplo uma superfície S imersa em R^5, dada localmente em $p \equiv (0, 0)$ na forma de Monge por $\varphi(x, y) = (x, y, x^2, xy,\ y^2)$. Temos que $\varphi_{xx}(0, 0) = (0, 0, 2, 0, 0)$, $\varphi_{yy}(0, 0) = (0, 0, 0, 0, 2)$, $\varphi_{xy}(0, 0) = (0, 0, 0, 1, 0)$. Logo $H = (0, 0, 1, 0, 1)$, $B = (0, 0, 1, 0, -1)$, $C = (0, 0, 0, 1, 0)$ e a elipse de curvatura é uma elipse que não passa pela origem (Figura)

B. Alguns resultados

Com a definição de Elipse de curvatura podemos chegar aos seguintes resultados:

Seja φ uma imersão de S em R^5, dada localmente em $p \in S$ na forma de Monge, o *primeiro espaço normal* de S em p denotado por N^1_pS é o subespaço de N_pS gerado pelos vetores $\varphi_{xx}(p)$, $\varphi_{yy}(p)$, $\varphi_{xy}(p)$.

13º FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO FEPEG
A UNIVERSIDADE NA CONTEMPORANEIDADE DIÁLOGOS E CONSTRUÇÕES
Realização: Unimontes, MINAS GERAIS GOVERNO DIFERENTE. ESTADO EFICIENTE., PIBID Unimontes, Residência Pedagógica Unimontes
Apoio: FAPEMIG, FADENOR
ISSN: 1806-549X

O subespaço afim de S em p, denotado por Aff_p, é o subespaço de menor dimensão que contém a elipse de curvatura. O subespaço vetorial de S em p, denotado por E_p, é o subespaço linear de N_pS paralelo a Aff_p.

Sejam S uma superfície imersa em $R^n, n\geq 4$ e $p\in S$, dizemos que p é um ponto *umbílico* se degenera em um ponto e *umbílico planar* se esse ponto for a origem de N_pS. p é dito um ponto *semiumbílico* se a elipse de curvatura se degenera em um segmento e ponto *semiumbílico radial* (ou ponto de *inflexão*) se a elipse se degenera em um segmento radial.

Seja S uma superfície imersa em $R^n, n\geq 5$, $p\in S_i$ (ou p é do tipo S_i) se, e somente se, dim $dim\, N_p^1 S = i$. $p\in S_3$ se, e somente se, Aff_p é um plano que não passa pela origem p (**Figura 2A**). $p\in S_2$ e a elipse de curvatura não se degenera se, e somente se, Aff_p é um plano que passa pela origem p de N_pS (**Figura 2B**). $p\in S_2$ é um ponto semiumbílico se, e somente se, Aff_p é uma reta que não passa pela origem p de N_pS (**Figura 2C**). $p\in S_1$ é um ponto de inflexão se, e somente se, Aff_p é uma reta que passa pela origem p de N_pS (**Figura 3A**). $p\in S_1$ é um ponto umbílico se, e somente se, Aff_p é um ponto distinto de p (**Figura 3B**). $p\in S_0$ é um ponto umbílico planar se, e somente se, $Aff_p = \{p\}$ (**Figura 3C**).

Conclusão/Conclusões/Considerações finais

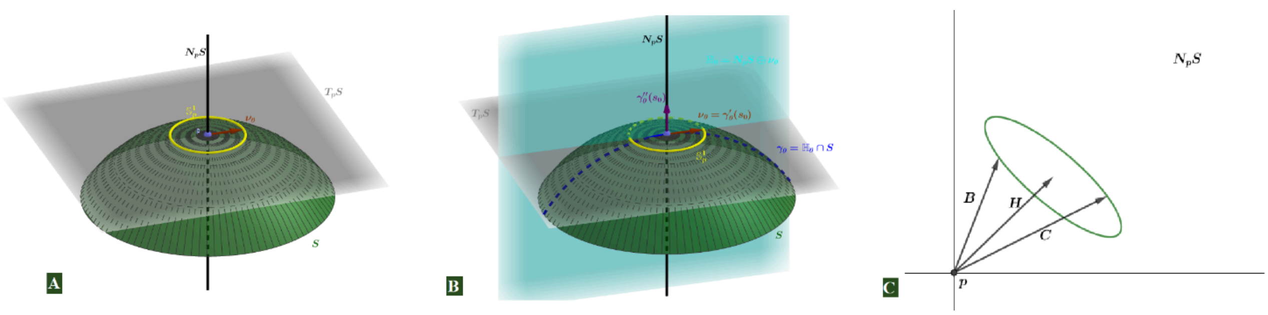
Através da definição da elipse de curvatura, conseguimos novas definições, que proporcionam novas maneiras de classificar pontos de uma superfície, fato que colabora no estudo de 2-variedades em dimensões maiores que 3. Essas não são as únicas aplicações da elipse de curvatura, pode ser feita uma extensão de seu conceito à 3-variedades, porém esse assunto foge do escopo desse trabalho.

Agradecimentos

Agradecemos a Universidade Estadual de Montes Claros e as Pró-reitorias de Ensino, Extensão e Gestão pela oportunidade de realização desse presente trabalho. Agradecemos também ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) e a Universidade Federal de Minas Gerais pelo apoio.

Referências bibliográficas

[1]BINOTTO, R.R **Projetivos de curvatura**. Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, Campinas, 2008
[2]LITTLE, J. **On singularities of submanifolds of higher dimension euclidean space**. Annali Mat. Pura et Appl, série 4A, 83, 261-336,1969.
[3]KOMMERELL,K. **Riemannsche flachen in ebenen raun von vier dimensionen.** Math.Ann, 60,546-596. 1905.
[4]MORAES,S.M. **Elipses de Curvatura no Estudo de Superfícies Imersas em** R^n, $n \geq 5$. 2002. Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, Campinas, 2002.
[5]RODRIGUES, D. S. **Projetivo de curvatura em pontos de uma 3-variedade.** 2013. Dissertação de Mestrado – UFV, Viçosa 2013



13° FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
FEPEG
A UNIVERSIDADE NA CONTEMPORANEIDADE
DIÁLOGOS E CONSTRUÇÕES
Realização: Unimontes · MINAS GERAIS GOVERNO DIFERENTE. ESTADO EFICIENTE. · PIBID Unimontes · Residência Pedagógica Unimontes
Apoio: FAPEMIG · FADENOR
ISSN: 1806-549X

Fig. 1A Superfície em R^3, com plano tangente, reta normal, círculo unitário no T_pS e direção ν_θ. **Fig. 1B** Seção normal da superfície S na direção ν_θ, gerando a curva γ_θ. **Fig. 1C** Vetores da elipse de curvatura. O vetor H é chamado vetor curvatura média que consideramos com origem no ponto p e extremo no centro da elipse de curvatura e os vetores B e C geram a elipse de curvatura.

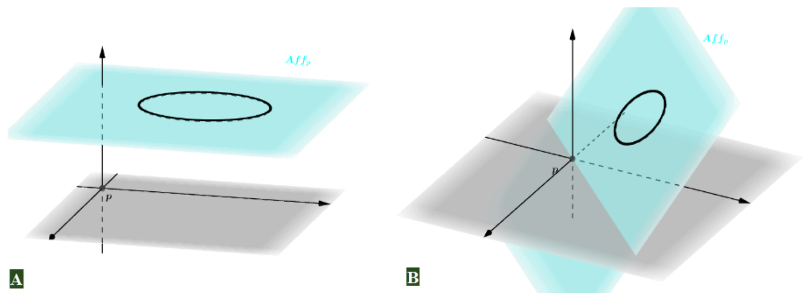


Fig. 2A p é um ponto do tipo S_3, *ou seja, a elipse é não degenerada* e Aff_p é um plano que não passa pela origem de N_pS. **Fig. 2B** p é um ponto do tipo S_2, ou seja, a elipse não se degenera e o ponto p está no espaço Aff_p que passa pela origem. **Fig. 2E** p é um ponto do tipo S_2 e é semiumbílico, ou seja, a elipse se degenera em um segmento de reta, mas p não pertence ao espaço Aff_p.

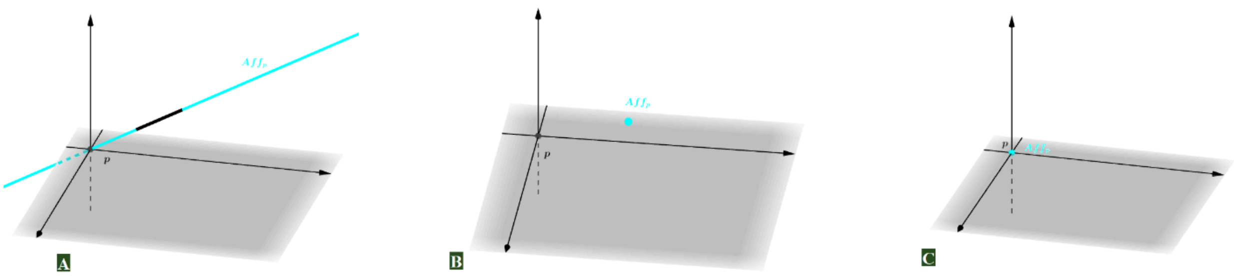


Fig. 3A p é um ponto do tipo S_1 e é ponto de inflexão ou seja, a elipse se degenera em um segmento de reta e o ponto p pertence ao espaço Aff_p. **Fig. 3B** p é um ponto do tipo S_1 e é um ponto umbílico, ou seja, a elipse se degenera em um ponto distinto do ponto p. **Fig. 3C** p é um ponto do tipo S_0 e é um ponto umbílico planar, ou seja, a elipse se degenera em um ponto p na origem de Aff_p.